



Resolução de um problema contra-intuitivo de probabilidades em trabalho colaborativo

Carla Santos¹ e Cristina Dias²

¹Departamento de Matemática e Ciências Físicas do Instituto Politécnico de Beja

²Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Portalegre

Ensino superior → **Probabilidades e Estatística**



Engenharias,
Ciências Sociais,
Enfermagem,
Gestão de
Empresas, etc.

Probabilidades

Teoria das Probabilidades

Difícil
aprendizagem

Conceitos que mais equívocos causam :

(Polaki, 2005, Tarr & Lannin, 2005 ou Watson & Moritz, 2002)

- **probabilidade condicionada**
- **probabilidade conjunta**

Equívocos são transversais aos diversos graus de ensino

(Correia et al., 2011 e Estrada & Díaz, 2006).

Ferramenta fundamental para a compreensão
do mundo que nos rodeia



Interpretação de
informação de natureza
probabilística, nas mais
diversas circunstâncias

Tomada de decisão em
situações de incerteza

Problemas de
probabilidades



Fenómenos do
quotidiano

Os alunos propõem,
soluções sustentadas
apenas no senso
comum e na intuição.

Problemas conduzem,
frequentemente, a
soluções contra-
intuitivas exigindo
raciocínios complexos.

- Os equívocos associados à interpretação das probabilidades não desaparecem com o desenvolvimento cognitivo espontâneo;
Para promover raciocínios correctos é necessário usar estratégias que desafiem a intuição probabilística dos alunos, sob pena de as intuições erradas permanecerem inalteradas;
- É essencial que essas tarefas exijam o envolvimento pessoal do aluno.

Confrontar os alunos com
situações contra-intuitivas !

Problemas contra-intuitivos no ensino das probabilidades

O uso de problemas contra-intuitivos constitui uma estratégia pedagógica construtivista, que proporciona uma aprendizagem profunda. (Lesser, 1998)

Esta estratégia, cujo ponto de partida são as crenças prévias dos alunos, permite abordar, de forma desafiante e motivadora, situações com elevada incidência de equívocos.
(Contreras, Batanero, Arteaga & Cañadas, 2011)

A discussão e análise, das resoluções destes problemas contra-intuitivos, estimulam, nos alunos, a reflexão acerca dos seus processos de raciocínio, promovendo o desenvolvimento da capacidade matemática abstracta. (Falk & Konold, 1992)

Vantagens

Probabilidade Condicionada

A simplicidade da fórmula de cálculo da probabilidade condicionada facilita:

- a memorização;
- a aplicação na resolução de problemas rotineiros.

Destreza na utilização da fórmula



Domínio dos problemas de probabilidades condicionadas

A grande maioria dos alunos não forma a representação interna do problema, limitando-se a reproduzir um processo vazio de significado.

(Noddings et al ,1980)

Muitas das dificuldades encontradas na resolução de problemas de probabilidades condicionadas devem-se a erros de interpretação.

Pollatsek, Well, Konold & Hardiman (1987)

Perante um problema em que a informação é apresentada em linguagem corrente, os alunos revelam dificuldades:

- na tradução para linguagem simbólica;
- na identificação das probabilidades fornecidas e solicitadas;
- na escolha das fórmulas que deverão usar .

Ancker (2006)

**Quando o problema apresenta um carácter contra-intuitivo,
as dificuldades agravam-se!**

Equívocos no cálculo de probabilidades condicionadas



Menosprezar ou interpretar erradamente a informação adicional de que dispomos.

(Fischbein & Gazit, 1984, Tarr & Jones 1997, Watson & Moritz 2002, Tarr & Lannin 2005, Polaki, 2005)

Dificuldade de interpretação dos enunciados

+

Influência negativa da intuição

Processos de ensino-aprendizagem centrados no aluno

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

possui características que:

- fomentam a construção do conhecimento através de interacção social;
- promovem o pensamento crítico dos alunos;
- reforçam a sua autonomia;
- permitem a aprendizagem em contexto e baseada na experiência dos alunos;
- favorecem as atitudes positivas relativamente à aprendizagem.

(Schmidt, 1993, Savin-Baden, 2000, Dahlgren & Dahlgren, 2002).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para que a aprendizagem através da resolução de problemas seja eficaz, os problemas adoptados:

- não deverão ter grande proximidade com os conhecimentos prévios dos alunos, ou serão demasiado fáceis de resolver;
- não deverão ter um grau de afastamento tão grande que os alunos não encontrem o elo de ligação entre o problema e os seus conhecimentos prévios.

(Berkel, 2010)

RESOLUÇÃO de PROBLEMAS em TRABALHO COLABORATIVO

Durante o processo de resolução de problemas, através de trabalho colaborativo, os alunos têm a possibilidade de:

- discutir entre eles a melhor estratégia;
- entreajudarem-se e encorajarem-se mutuamente para superar as dificuldades.

Melhorias:



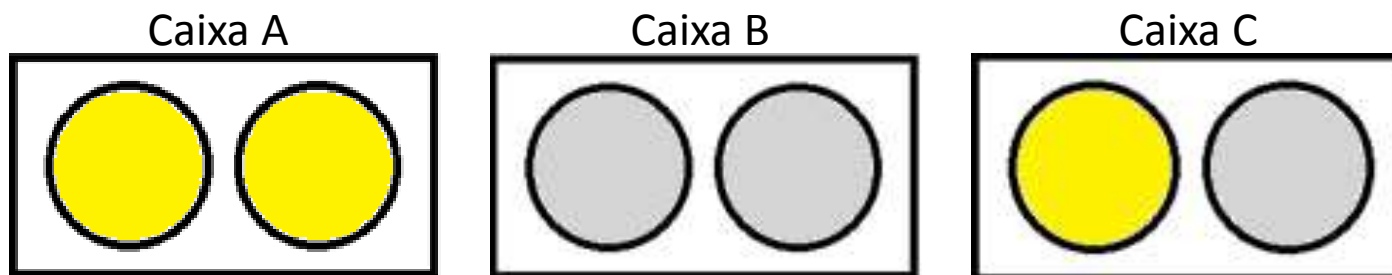
Johnson & Johnson (1990) , Smith & MacGregor (1992)

PROBLEMA da CAIXA de BERTRAND

A literatura sobre probabilidades é fértil em problemas onde a nossa intuição nos leva a menosprezar ou interpretar erroneamente a informação adicional de que dispomos.

Um dos mais famosos é o problema da “Caixa de Bertrand” enunciado, pela primeira vez, pelo matemático francês Joseph Bertrand, na sua obra *“Calcul des probabilités”*, de 1889.

PROBLEMA da CAIXA de BERTRAND



Após a escolha aleatória de uma das caixas, extrai-se uma moeda dessa caixa.

Tendo-se verificado que a moeda extraída é de ouro, qual a probabilidade de a outra moeda dessa caixa ser também de ouro?

PROBLEMA da CAIXA de BERTRAND

Problema envolvendo o cálculo de probabilidades condicionadas

Resposta errada: com base na intuição, a resposta mais comum é $\frac{1}{2}$. O equívoco, tal como destacou o próprio Bertrand, está em considerar que a probabilidade de a outra moeda ser ouro é igual à probabilidade de ser prata.

Resposta correcta: Para alcançar a solução correcta é necessário ter em conta que se for escolhida a caixa que tem duas moedas de ouro, qualquer uma dessas moedas pode ter sido a extraída. A probabilidade é portanto $\frac{2}{3}$.

Prática pedagógica

Resolução do problema da caixa de Bertrand através de trabalho colaborativo em pares.

Com o problema de Bertrand pretende-se que os alunos:

- apliquem, num problema de palavras, os conhecimentos adquiridos previamente (conceitos: experiência aleatória, espaço amostral, probabilidade, probab. condicionada ...)
- sejam confrontados com uma situação contra-intuitiva, que lhes permita consciencializar-se de que o domínio do processo de aplicação das fórmulas é insuficiente para a resolução de muitos dos problemas de probabilidades.

Prática pedagógica

Resolução do problema da caixa de Bertrand através de trabalho colaborativo em pares.

Com o trabalho colaborativo em pares pretende-se :

- proporcionar, a todos os alunos, a oportunidade de expor e discutir os seus raciocínios;
- permitir a entreaajuda na procura da estratégia mais adequada;
- estimular a motivação e persistência na resolução da tarefa que, parecendo inicialmente muito simples, envolve raciocínios com alguma complexidade.

Prática pedagógica

Resolução do problema da caixa de Bertrand através de trabalho colaborativo em pares.

- 20 alunos do ensino superior politécnico que frequentam a u.c. de Bioestatística
- 1 é do sexo masculino
- 35% (7) dos alunos nunca tinham estudado probabilidades antes da frequência desta u.c..
- A escolha dos elementos dos grupos foi da responsabilidade dos alunos, de acordo com critérios como a proximidade física na sala de aula e os laços afectivos.

Prática pedagógica

Resolução do problema da caixa de Bertrand através de trabalho colaborativo em pares.

1ª aula

Docente	Alunos
Apresentação do enunciado do problema	90 minutos para elaborar, por escrito, uma proposta de resolução

2ª aula

Apresentação oral/quadro das resoluções	
Discussão das propostas de resolução	
Solução correcta do problema	
Reflexão sobre as estratégias adoptadas pelos alunos	
Análise dos erros mais frequentes	

Resoluções do problema da caixa de Bertrand

Os registos escritos produzidos pelos alunos foram analisados e as respostas foram classificadas de acordo com a sua correcção e os tipos de erros cometidos.

- Nenhuma resolução apresentava a resposta correcta;
- Metade das respostas correspondia à solução intuitiva que é comum neste problema.

Erros mais frequentes deveram-se a:

- dificuldade de interpretação do enunciado
- deficiente domínio dos conceitos de independência, equiprobabilidade e redução do espaço amostral.

Resoluções do problema da caixa de Bertrand

Perante problemas com este grau de dificuldade é comum os alunos desistirem durante a tentativa de resolução.

Apesar de não se terem obtido respostas correctas, verificou-se que o trabalho colaborativo motivou uma reacção positiva por parte dos alunos, que se traduziu em:

interesse pela actividade

empenho na resolução

Discussão colectiva da resolução correcta e dos erros cometidos



Os alunos tomam consciência de que, para resolver eficazmente problemas do tipo do problema de Bertrand, é necessário desenvolver raciocínios que são, frequentemente, contrários à intuição e mais complexos do que pareciam à primeira vista.

TRANSFERIBILIDADE

Dadas as dificuldades que grande parte dos alunos revela na resolução de problemas de probabilidades, a adopção do trabalho colaborativo poderá contribuir para que os alunos encarem positivamente as dificuldades com que se deparam no processo de resolução dos exercícios, melhorando a compreensão conceptual.

OBRIGADA PELA ATENÇÃO!